



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ITERADAS DE FUNÇÕES FRACTAIS

JEDSON COSTA DE CARVALHO

Orientação: CARLOS CORREIA RAMOS E LUIS BANDEIRA

Mestrado em Matemática e Aplicações



ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ITERADAS DE FUNÇÕES FRACTAIS

JEDSON COSTA DE CARVALHO

Orientação: CARLOS CORREIA RAMOS E LUÍS BANDEIRA

Mestrado em Matemática e Aplicações



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

O corpo de jurados, abaixo listado, aprova o **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES (SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE) “Iteradas de Funções Fractais”** elaborado por **Jedson Costa de Carvalho** Como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, pela Universidade de Évora.

Orientador : Carlos Ramos e Luís Bandeira, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Arguente : Sandra Vinagre, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Presidente : Dulce Gomes, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Data: 27 de Março de 2019 às 15h

Local: Sala de aula de Centro Cultural Português (CCP)

ITERADAS DE FUNÇÕES FRACTAIS

Tese apresentada à Universidade de Évora

Dezembro de 2018



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado força e vontade nessa longa e árdua jornada, e que permitiu que eu pudesse sair vencedor nessa caminhada.

A minha esposa Edna Tavares Neto por estar ao meu lado, pelo amor, apoio, carinho que me deu incondicionalmente.

As minhas filhas e o meu filho por me fazer descontraír nas horas de grande tensão.

Aos meus orientadores, Carlos Correia Ramos e Luís Bandeira, por todo apoio, paciência, dedicação e a vontade de transmitir os seus conhecimentos durante a realização deste trabalho.

A todos os professores da Universidade de Évora que de uma forma ou de outra fizeram que esse sonho se torne uma realidade.

Enfim, a todos meus colegas e amigos

Resumo

A beleza da natureza é fator de inspiração para mais diversas áreas. Não poderia ser diferente na Matemática. Na verdade, os padrões observados em elementos presentes na natureza são principal combustível da investigação Matemática. Neste trabalho propomos estudar um grupo de funções que são totalmente descontínuas e que são auto-semelhantes. Para isso definimos e caracterizamos as aplicações do intervalo associadas a autómatos celulares, através da regra local do autômato. É também importante definir as condições de fronteiras à esquerda devido à identificação de configurações do autômato-estado global com a expansão numérica na base referida.

Os gráficos obtidos das aplicações deste tipo são auto-semelhantes e dependentes diretamente da regra local das transições.

Usou-se uma regra a dois estados – 184 - para obtenção dos cálculos explícitos e uma regra a três estados.

Abstract

Iterated fractal functions

The beauty of nature is a factor of inspiration for many different areas. It could not be different in Mathematics. In fact, the patterns seen in elements present in the nature are the main fuel of mathematical research. In this work we propose to study a group of functions that are totally discontinuous and that are self-similar. For this we define and characterize the range applications associated with cellular automata, through the local rule of the automaton. It is also important to define the boundary conditions on the left due to the configurations of the global state-automaton with the numerical expansion in the referred base.

The graphs obtained from the applications of this type are self-similar and directly dependent on the local rule of transitions.

A two state rule 184 was used to obtain the explicit calculations and a three state rule.

Índice

Introdução.....	7
1 Preliminares	8
1.1 Base numérica binária.....	8
1.2 Sistema dinâmicos discretos.....	9
1.3 Processos Estocásticos	14
1.4 Cadeias de Markov	15
1.4.1 Representação matricial de uma cadeia de Markov	16
1.4.2 Caminhos Aleatórios em grafos.....	18
1.4.3 Medida de Parry.....	18
2 Autômatos Celulares.....	21
2.1 Definição informal.....	22
2.2 Definição formal.....	23
2.2.1 Regras de equivalências	27
3 A regra 184 e aplicações do intervalo 0,1 nele próprio	29
4 Autômato celular de 3 estados e aplicação do intervalo	45
5 Conclusão.....	52
6 Bibliografia	53

Índice de Figuras

Figura 1: Conversão do número 25 (na base decimal) na base binária	8
Figura 2: Digrafo de dois vértices.....	10
Figura 3: Andrei Andreyevich Markov (1856, Ryazan, Rússia; 1922, São Petersburgo, Rússia).	15
Figura 4: Modelo Greenber-Hasting (Fonte: Revista de Ciências Exatas e Tecnologia Vol.III, Nº3, Ano 2008).	23
Figura 5: Evolução do autômato de Greenber-Hasting durante o tempo (Fonte: Revista de Ciências Exatas e Tecnologia Vol.III, Nº3, Ano 2008).	23
Figura 6: Representação gráfica de cada coluna da Tabela 2.	26
Figura 7: Configuração inicial T_0	26
Figura 8: Autômatos celulares com as mesmas condições iniciais num período mais longo.	26
Figura 9: Autômatos Celulares (Fonte: Material da aula).	27
Figura 10: Espaço temporal das regras 110, 124, 137 e 193, para uma condição inicial de 148 brancos e 1 preto, com 149 iterações.....	28
Figura 11: Regra 184-0 esquerda	37
Figura 12: Regra 184-0 esquerda com condição inicial aleatória	37
Figura 13: Regra 184-1 esquerda.	42
Figura 14: Regra 184-1 com condição inicial aleatória.....	43
Figura 15: Regra 184 com três estados.....	46
Figura 16: Regra 277019723695.	51

Introdução

Os sistemas dinâmicos discretos têm sido alvo de grande atenção e de aplicações por vários investigadores em diversos ramos da ciência, como por exemplo na biologia evolutiva, na dinâmica das reações químicas, nos sistemas dinâmicos da física, no comportamento dos mercados, entre outros. Os sistemas dinâmicos discretos serão abordados no presente trabalho, em particular aplicações do intervalo e autómatos celulares. Procuramos caracterizar um sistema dinâmico discreto definido por uma aplicação iterada do intervalo que é totalmente descontínua e que é associada a regras específicas de autómatos celulares a uma dimensão. Existe uma partição de Markov e também uma matriz de transição correspondente. (Luís Bandeira e Carlos Ramos, 2016)

O trabalho está dividido em **4 capítulos**, distribuídos da seguinte forma:

No 1º capítulo, Preliminares, fizemos uma abordagem sumária e introdutória sobre bases numéricas, sistemas dinâmicos, teorema de Perron-Frobenius e cadeias de Markov.

No 2º capítulo, Autómatos celulares, abordamos os autómatos celulares de um modo informal e formal. Vimos que os autómatos celulares são ferramentas que podem representar diversos sistemas evolutivos, e que as suas principais características são a computação descentralizada, onde cada célula é capaz de determinar a sua evolução baseando-se nos estados anteriores de um conjunto vizinho de células.

No 3º capítulo, Regra 184 e aplicações do intervalo $[0, 1]$ nele Próprio, o principal capítulo da tese em conjunto com o capítulo 4, consideramos a aplicação $F: \varepsilon^\Omega \rightarrow \varepsilon^\Omega$ associada à regra 184, construímos e caracterizamos uma aplicação $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ induzida por F de forma obter uma semi-conjugação entre (ε^Ω, F) e $([0, 1], g)$.

No 4º capítulo, autómato celular de 3 estados e aplicação do intervalo, implementamos um exemplo de um autómato de 3 estados do tipo $(-1, 1)$, sendo assim $\varepsilon = \{0, 1, 2\}$ e através da aplicação local f determinamos a aplicação $F: \varepsilon^\Omega \rightarrow \varepsilon^\Omega$, a aplicação do intervalo que a realiza $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, assim como a matriz de transição.

1 Preliminares

1.1 Base numérica binária

Os números reais podem ser representados em diferentes bases, recorrendo a distintos conjuntos finitos de símbolos chamados dígitos. Na base decimal usual utilizam-se dez dígitos $\{0,1,2,3, \dots, 9\}$ e na base binária dois dígitos $\{0,1\}$. Para encontrar o número binário correspondente a um número decimal, fazem-se divisões sucessivas do número em representação decimal por 2. Em seguida, o resto da divisão de cada operação é coletada de forma invertida, da última para a primeira operação de divisão, como mostra o exemplo na Figura 1 abaixo:

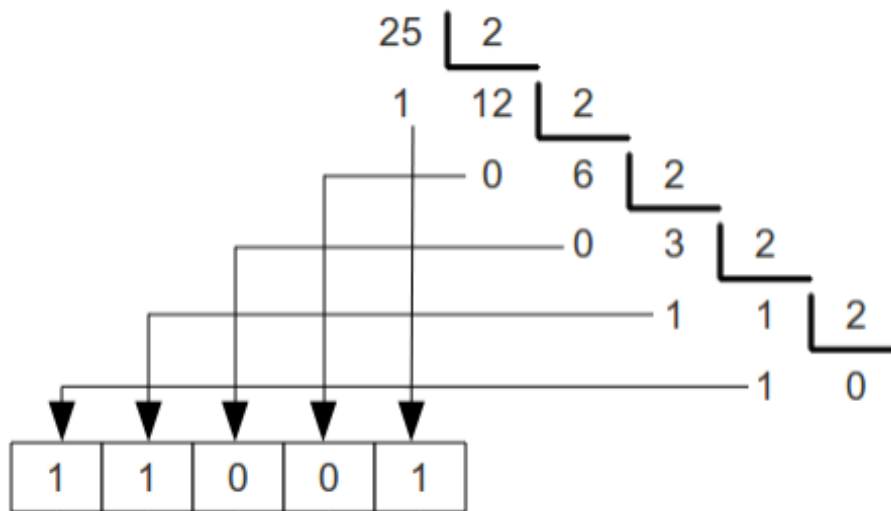


Figura 1: Conversão do número 25 (na base decimal) na base binária

Assim, $(25)_{10} = (11001)_2$.

Usualmente não se explicita a base em que se está a trabalhar, exceto quando há conversão entre bases. Deste modo $25 = (25)_{10}$ se não houver perigo de confusão de que base se trata e do mesmo modo $11001 = (11001)_2$.

Um número x representado na base numérica binária toma a forma $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)$ onde

$a_n = 1$, $a_i = 0$ ou 1 , com $0 \leq i < n - 1$, isto é:

$$x = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$

Por exemplo, o número 184 em binário é 10111000, pois:

$$184 = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

1.2 Sistema dinâmicos discretos

Consideremos o conjunto X , eventualmente com alguma estrutura adicional (topologia, medida, métrica, ou outra) e uma aplicação $f: X \rightarrow X$ que preserve a estrutura em causa. O par (X, f) forma um sistema dinâmico discreto. (Martinho, 2003)

A evolução temporal do sistema é dada por iteração da aplicação f , onde em cada instante o sistema é caracterizado por um elemento X . Designa-se por órbita de um ponto x_0 , o conjunto $\{x_n: n \in \mathbb{N}_0\}$, sendo $x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, isto é, o conjunto de pontos resultante da composição sucessiva da função f consigo própria.

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$$

Os sistemas $f: X \rightarrow X$ e $g: Y \rightarrow Y$ dizem-se conjugados (topologicamente, mensuravelmente, metricamente, ...) se existe uma aplicação $h: X \rightarrow Y$ invertível tal que $g \circ h = h \circ f$ sendo que o sistema (Y, g) é equivalente a (X, f) . No caso em que a aplicação h é apenas sobrejetiva, então os sistemas dizem-se semi-conjugados.

Dada uma partição de X , $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e se f preserva esta partição, ou seja a imagem por f de elementos da partição é uma união de elementos da partição, é possível definir uma matriz de transição - chamada de matriz de Markov, (Ramos, 2017)

$$A_f = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(X_i) \supset X_j \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases},$$

que caracteriza a dinâmica de f em X . Define-se também, associado a f , um digrafo de Markov $G_f = (V_f, E_f)$, onde A_f é neste caso a matriz de adjacência de G_f , $V_f = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um conjunto de vértices, identificados com os elementos da partição X , e $E_f \subseteq V_f \times V_f$ é conjunto de arestas de G_f identificadas com as possíveis transições.

Em geral, dado um digrafo $G = (V, E)$, com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E \subseteq V \times V$ diz-se que a matriz $[a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ é a matriz adjacência de G se:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (v_i, v_j) \notin E \\ 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Diz-se, também, que a matriz $[d_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ é a matriz incidência de G se

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_i \text{ não incide em } v_j \\ -1 & \text{se } e_j \text{ sai de } v_i \\ +1 & \text{se } e_j \text{ entra em } v_i \end{cases}$$

Exemplo – *shift* de Fibonacci

Dado o digrafo abaixo, na Figura 2, podemos construir a sua matriz adjacência A e a matriz de incidência D ,

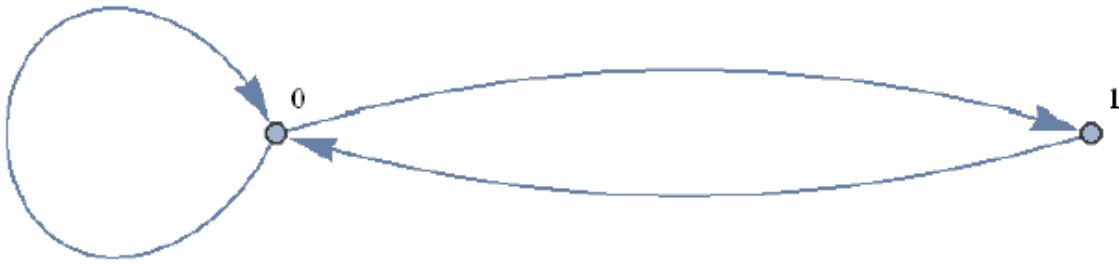


Figura 2: Digrafo de dois vértices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Através da matriz de adjacência podemos calcular quantos caminhos de comprimento k existem saindo em cada um dos vértices do grafo ou o que é equivalente, calcular o número de palavras de comprimento k que se podem formar obedecendo às regras de transição dadas pela matriz de adjacência. Para isso determina-se uma recorrência definida a partir da matriz de adjacência como se vê em seguida: seja $N_0(k)$ o número de caminhos que partem em 0 e $N_1(k)$ o número de caminhos que partem em 1 de comprimento k . (Ramos, 2017)

Na figura 2 podemos identificar o número de caminhos de comprimento k que existem partindo em cada um dos vértices:

Caminhos de comprimento 0: 0 e 1

Caminhos de comprimento 1: 00, 01 e 10

Caminhos de comprimento 2: 000, 001, 010, 100, 101

Caminhos de comprimento 3: 0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010

Caminhos de comprimento $k + 1$ podem ser definidos à custa dos caminhos de comprimento k

Os que começam com 0 : $\xi \rightarrow 0\xi$ e 1ξ

Os que começam com 1 : $\eta \rightarrow 0\eta$

$$\begin{cases} N_0(k+1) = N_0(k) + N_1(k) \\ N_1(k+1) = N_0(k) \end{cases}$$

Da matriz de adjacência do grafo da figura 2,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

calculamos a matriz diagonal D formado pelos valores próprios de A,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

e a matriz S, de mudança de base, formada pelos vetores próprios de A,

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}(5 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

Logo a matriz A é uma matriz diagonalizável

$$A = SDS^{-1}.$$

E com isso fica fácil calcular as potências da matriz A

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1} \text{ pois } S^{-1}S = I$$

$$A^3 = (SDS^{-1})^2(SDS^{-1}) = SD^3S^{-1}$$

\vdots

$$A^k = (SDS^{-1})^{k-1} (SDS^{-1}) = SD^k S^{-1}$$

Deste modo o cálculo do número de palavras vem

$$\begin{bmatrix} N_0(k) \\ N_1(k) \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix} = SD^k S^{-1} \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_0(k+1) \\ N_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(k) \\ N_1(k) \end{bmatrix} = AA^k \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix} \text{ onde } A = SDS^{-1} \rightarrow A^k = SD^k S^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} N_0(k+1) \\ N_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(k) \\ N_1(k) \end{bmatrix} = S^{-1} D^{k+1} S \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix}$$

$$N(k) = N_0(k) + N_1(k) = SD^k S^{-1} \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix}$$

Para aligeirar a notação, definimos $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e assim temos $1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ e $\phi^{-1} = \phi - 1$.

Os valores próprios de A : $\{1 - \phi, \phi\}$

Vetores próprios de A : $\{(1 - \phi, 1), (\phi, 1)\}$

A matriz S de diagonalização $S = \begin{bmatrix} 1 - \phi & \phi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S^{-1} = \frac{1}{1-2\phi} \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ -1 & 1 - \phi \end{bmatrix}$

Deste modo:

$$\begin{bmatrix} N_0(k) \\ N_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{(1+n)}(N_0 + (-1 + \phi)N_1) + (1 - \phi)^n(-1 + \phi)(N_0 - \phi N_1)}{-1 + 2\phi} \\ \frac{\phi^n(N_0 + (-1 + \phi)N_1) + (1 - \phi)^n(-N_0 + \phi N_1)}{-1 + 2\phi} \end{bmatrix}$$

$$N(k) = \frac{\phi^n(1 + \phi)(N_0 + (-1 + \phi)N_1) + (1 - \phi)^n(-2 + \phi)(N_0 - \phi N_1)}{-1 + 2\phi}$$

Observação 1.2.1: Em geral, para um digrafo, G com n vértices, o número de caminhos de comprimento k que parte do vértice v_i e chega ao vértice v_j é dado pela entrada i, j da

k -potência da matriz de adjacência A ou seja $(A^k)_{ij}$. O número de caminhos fechados (ciclos) de comprimento k é dado pelo $Tr(A^k)$

$$N(k) = \sum_{i=1}^n N_i(k)$$

$$\begin{bmatrix} N_1(k) \\ \vdots \\ N_n(k) \end{bmatrix} = S^{-1} J(A)^k S \begin{bmatrix} N_1(0) \\ \vdots \\ N_n(0) \end{bmatrix}$$

Onde $J(A) = SAS^{-1}$ é a forma canônica de Jordan de A , generalizando o caso em que a matriz não é diagonalizável.

Exemplo 1.2.1: Dado o grafo da figura 2, a sua matriz adjacência $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- a) Quantos caminhos que começam no vértice 1 e acabam no vértice 2, de comprimento 5, existem?
- b) Quantos caminhos fechados de comprimento k existem?

Solução:

$A \rightarrow$ caminhos de comprimento 1

$A^2 \rightarrow$ caminhos de comprimento 2

\vdots

$A^k \rightarrow$ caminhos de comprimento k

$Tr(A) \rightarrow$ caminho fechados (ciclos) de comprimento 1

$Tr(A^2) \rightarrow$ caminho fechados (ciclos) de comprimento 2

\vdots

$Tr(A^k) \rightarrow$ caminho fechados (ciclos) de comprimento k

a) $A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Temos 5 caminhos de comprimento 5 que começam no vértice 1 e acabam no vértice 2

- b) O número de caminhos fechados (ciclos) de comprimento k será igual a $Tr(A^k)$

Nos sistemas discretos de Markov (X, f) , por existir uma partição finita do espaço subjacente X que é preservada pela aplicação f , é possível descrever combinatoriamente as órbitas do sistema (X, f) , trabalhando com sequências simbólicas no alfabeto $\{ 1, 2, 3, \dots, n \}$ que correspondem a uma enumeração da partição. A iteração da aplicação f corresponde por semi-conjugação à iteração da aplicação *shift* σ .

Para certas condições de f é possível garantir correspondência biunívoca (por exemplo, a expansividade de f).

1.3 Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $(X(t))$ indexadas por um parâmetro t (geralmente tempo). Portanto, pode-se afirmar que $(X(t))$ define um espaço denominado *espaço de estados*.

Os processos estocásticos podem ser classificados como:

- a) Em relação ao tipo de estado:
 - ✓ Estado discreto (cadeia): $(X(t))$ é definido sobre um conjunto enumerável ou finito;
 - ✓ Estado contínuo (sequência): $(X(t))$ caso contrário.
- b) Em relação ao tempo (parâmetro):
 - ✓ Tempo discreto: t é finito ou enumerável;
 - ✓ Tempo contínuo: t caso contrário.

Existem variados processos estocásticos. Abordaremos apenas neste trabalho o processo de Markov.



Figura 3: Andrei Andreyevich Markov (1856, Ryazan, Rússia; 1922, São Petersburgo, Rússia).

1.4 Cadeias de Markov

Seja $X = \{X(t): t \in T\}$ um espaço de estados onde T é um conjunto enumerável.

Definição 1.4.1 Diz-se que X define uma cadeia de Markov (CM) se

$$P_1 = \Pr[X(K+1) = x_{k+1} | X(K) = x_k, X(K-1) = x_{k-1}, \dots, X(0) = x_0] \text{ e}$$

$$P_2 = \Pr[X(K+1) = x_{k+1} | X(K) = x_k] \text{ são tais que } P_1 = P_2.$$

Isto quer dizer que a probabilidade de se atingir um estado futuro x_{k+1} depende apenas do estado presente x_k .

A probabilidade de transição entre os estados x_k e x_{k+1} é dada pela probabilidade condicionada $\Pr[X(K+1) = x_{k+1} | X(K) = x_k]$.

Definição 1.4.2 Numa cadeia de Markov, um estado x_j é chamado acessível a partir de um estado x_i , se para algum tempo finito $t \geq 0$, for verificado que

$$Pr[X(t) = x_j | X(0) = x_i] = p_{ij}^{(t)} > 0.$$

Assim, $p_{ij}^{(t)} > 0$ configura a transição $x_i \rightarrow x_j$ no tempo t , do mesmo modo que $p_{ji}^{(t)} > 0$ indica que x_i é acessível a partir de x_j no tempo t .

Definição 1.4.3 Uma cadeia de Markov é irreduzível, se para qualquer par de estados (x_i, x_j) , se verifica que $p_{ij}^{(t)} > 0$ e $p_{ji}^{(\bar{t})} > 0$, com $t \geq 0$ e $\bar{t} \geq 0$, para t e \bar{t} finitos.

1.4.1 Representação matricial de uma cadeia de Markov

Seja X um espaço de estados enumerável de uma cadeia de Markov. Se X é finito, com $n = \#X$, pode-se representar a cadeia de Markov por meio de uma matriz $P_{n \times n}$ chamada matriz de transição probabilística ou matriz de probabilidades (Ramos, 2017)

$$P = [p_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ onde todas as entradas p_{ij} verificam as propriedades

$$p_{ij} \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$$

diz-se **matriz estocástica**.

Uma matriz $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ **diz-se redutível** se todas as entradas são não negativas e existe uma matriz de permutação S tal que SPS^{-1} é da forma

$$SPS^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Se a matriz não é redutível diz-se irredutível

Uma matriz $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ diz-se **primitiva** se todas as entradas são não negativas e existe um natural n para o qual todas as entradas de P^n são todas positivas.

Uma maneira conveniente de mostrar as probabilidades de transição no instante n é:

Tabela 1: Tabela de probabilidades de transição.

Estado	0	1	...	M
0	$p_{00}^{(n)}$	$p_{01}^{(n)}$	\dots	$p_{0M}^{(n)}$
1	$p_{10}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$		$p_{1M}^{(n)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
M	$p_{M0}^{(n)}$	$p_{M1}^{(n)}$	\ddots	$p_{MM}^{(n)}$

Ou equivalente, por uma matriz $p^{(n)}$:

$$p^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}$$

A matriz $p^{(n)}$ é chamada **matriz de transição de passo n** . Quando $n = 1$ a matriz é apenas a matriz de transição já introduzida.

1.4.2 Caminhos Aleatórios em grafos

Seja G um grafo com matriz de adjacência $A = (a_{ij})$ e $P = (p_{ij})$ sua matriz adjacência pesada de modo que:

$$\sum_j^n p_{ij} = 1,$$

para todo i , e onde p_{ij} é a probabilidade de transição de i para j no passo seguinte. Notemos que neste caso $p_{ij} = 0$ se e só se $a_{ij} = 0$, de modo que as transições possíveis codificadas por ambas as matrizes são compatíveis.

Consideremos um vetor linha $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$, probabilístico, i.e., $\sum_i^n v_i = 1$. A componente i , v_i , do vetor v dá-nos a probabilidade de o sistema estar no vértice i . Deste modo vP (produto matricial, de uma matriz linha associada ao vetor v com a matriz quadrada P) será um novo vetor probabilístico, assim como vP^k , para k natural.

A probabilidade de o sistema iniciar em i_0 e no passo k estar em i_k é dada por $v_i(P^k)_{ij}$.

1.4.3 Medida de Parry

É possível construir um processo de Markov canónico associado a uma cadeia de Markov topológica, como apresentada anteriormente.

Seja A uma matriz primitiva. Então, o raio espectral da matriz $\rho(A)$ é um real positivo de multiplicidade algébrica e geométrica 1 e os vetores próprios, esquerdo e direito, associados a $\rho(A)$ têm entradas positivas. Neste caso $\rho(A)$ chama-se o **valor de Perron** de A e ao vetor próprio **direito** (esquerdo) o vetor de **Perron direito de A** (resp. esquerdo). Este resultado é referido na literatura como teorema de Perron-Frobenius. (Leon, 2018)

Seja A matriz primitiva e, considerando o teorema de Perron-Frobenius, seja $\lambda = \rho(A)$ o valor de Perron de A .

Sejam:

- ✓ v o vetor de Perron direito de A
- ✓ u o vetor de Perron esquerdo de A

$$Av = \lambda v$$

$$uA = \lambda u$$

Normalizando os vetores: (u_1, u_2, \dots, u_n) e (v_1, v_2, \dots, v_n) tais que $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n u_i = 1$.

Definimos o vetor $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ tal que

$$p_i = \frac{u_i v_i}{\sum_{j=1}^n u_j v_j}$$

Definimos também uma matriz $P_A = (p_{ij})$ com $p_{ij} = \frac{a_{ij} v_j}{\lambda v_i}$.

Neste caso a matriz P_A é estocástica e tem p como vetor de Perron esquerdo com valor de Perron 1.

A este valor próprio esquerdo (normalizado) designamos de medida de Parry do sistema.

O facto de P_A ser estocástica obriga a que o vetor de Perron direito seja o vetor cujas entradas são 1.

Exemplo 1.4.1: Seja A a matriz de adjacência do grafo da figura 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determinar a matriz estocástica P_A e a medida de Parry

Resolução:

Os valores próprios de A são $\left\{ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right\}$.

O valor de Perron de A é $\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

E os vetores próprios de A (esquerdos e direitos pois a matriz A é simétrica)

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), 1 \right), \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), 1 \right) \right\}$$

A sua matriz S de diagonalização é $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Os vetores de Perron, normalizados

$$u = v = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$A \text{ matriz } P = p_{ij} \text{ com } p_{ij} = \frac{a_{ij} v_j}{\lambda v_i}$$

$$p_{11} = \frac{a_{11}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$p_{12} = \frac{a_{12}v_2}{\lambda v_1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\lambda(-1 + \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$p_{21} = \frac{a_{21}v_1}{\lambda v_2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{\lambda(3 - \sqrt{5})} = 1$$

$$p_{22} = \frac{a_{22}}{\lambda} = 0$$

Daí temos a matriz $P_A = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2 Autômatos Celulares

Os autômatos celulares são ferramentas simples que podem representar a evolução temporal de diversos sistemas. A sua principal característica é a computação descentralizada, onde a evolução do estado de cada célula depende apenas dos estados, num instante de tempo anterior, das células vizinhas. A simplicidade da definição deste tipo de sistema, no entanto, pode ser enganadora face à possível complexidade de comportamento. Atualmente investigadores de diferentes temas científicos utilizam modelos de autômatos celulares para simular as suas aplicações em áreas como a biologia evolutiva, a dinâmica das reações químicas, os sistemas dinâmicos em mecânica, o comportamento do mercado, entre outros.

Todas essas aplicações que hoje existem são de algum modo consequência dos trabalhos de John Von Neumann, John Holton Conway e Stephen Wolfram, pioneiros do estudo de autômatos celulares. (Castro, 2008)

Em 1970, o matemático John Holton Conway criou o “jogo da vida”, popularizado por Martin Gardner, um autômato celular que simula alterações em populações de seres vivos baseado em regras locais simples. Neste autômato celular, cada célula nasce ou morre de acordo com as células vizinhas e o jogo tende para a morte de todas as células, para a geração de padrões estáveis ou para situações de expansão constantes, dependendo da configuração inicial.

Em 1982, Stephen Wolfram estudou sistematicamente o funcionamento dos autômatos celulares e a formação de certos padrões. A complexidade dos seus resultados levou à conclusão de que autômatos celulares poderiam ser utilizados como modelos matemáticos de sistemas físicos, biológicos e computacionais. Mais tarde, em 1983, Wolfram apresenta os primeiros resultados da investigação de autômatos como modelos matemáticos para sistemas auto-organizados. Nesse artigo, foram analisados detalhadamente os autômatos celulares simples, a uma dimensão, envolvendo sequências de células numa sequência com valores binários. Ao longo do tempo uma nova sequência é criada e cada célula tem o seu valor determinado nos valores das células vizinhas na sequência anterior. (Castro, 2008)

2.1 Definição informal

Informalmente pode-se introduzir um autômato celular pelas propriedades fundamentais:

- Consiste numa matriz ou grelha de células;
- A evolução dá-se em passos discretos de tempo;
- Cada célula é caracterizada por um estado pertencente a um conjunto finito de estados;
- Cada célula evolui de acordo com as mesmas regras que dependem somente do estado em que a célula se encontra e de um número finito de vizinhos;
- A relação com a vizinhança é local e uniforme.

Um exemplo simples a ser considerado é o modelo Greenber-Hasting, um autômato celular que modela a excitação num meio determinado. Um exemplo concreto deste tipo são os tecidos nervosos ou musculares (coração), que podem estar em três estados diferentes (repouso, excitado ou em recuperação). Esse modelo pode ser representado por um autômato celular com três estados (0) repouso, (1) excitado e (2) recuperação. A evolução de uma célula pode ser caracterizada pelas seguintes regras:

- Uma célula em repouso (estado 0) permanece em repouso até que algum vizinho entre no estado de excitado (estado 1), nesse caso a célula entra também no estado excitado;
- Uma célula em excitação (estado 1) entra em recuperação (estado 2) no próximo passo;
- Uma célula em recuperação (estado 2) entra em repouso (estado 0) no próximo passo.

Em resumo temos:

$$0 \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se nenhum vizinho} = 1 \\ 1 & \text{se algum vizinho} = 1 \end{cases}$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 0$$

Para a relação de vizinhança será utilizada uma vizinhança das quatro células ortogonais. A Figura 4 a seguir resume a transição de cada célula:

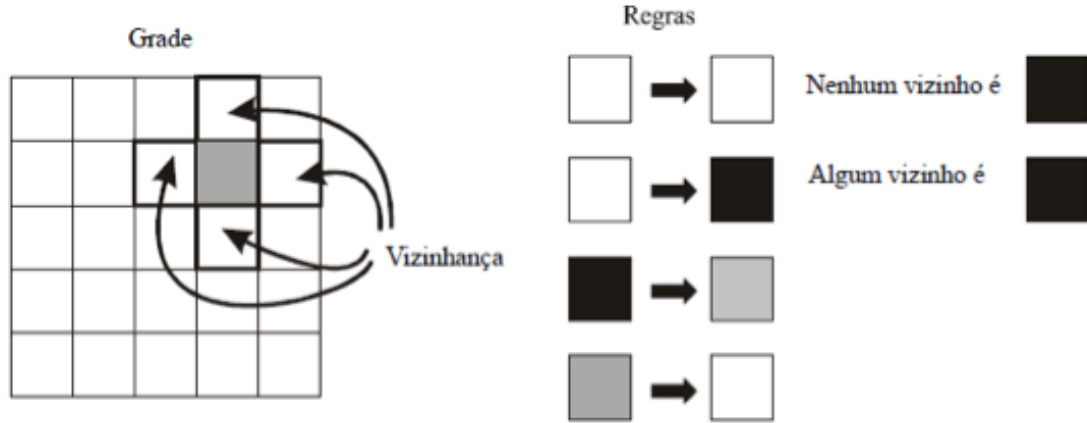


Figura 4: Modelo Greenber-Hasting (Fonte: Revista de Ciências Exatas e Tecnologia Vol.III, N°3, Ano 2008).

A evolução do autômato depende da condição inicial. Na Figura 5 é mostrado um exemplo com todas as células inicialmente no estado 0 e apenas uma no estado 1.

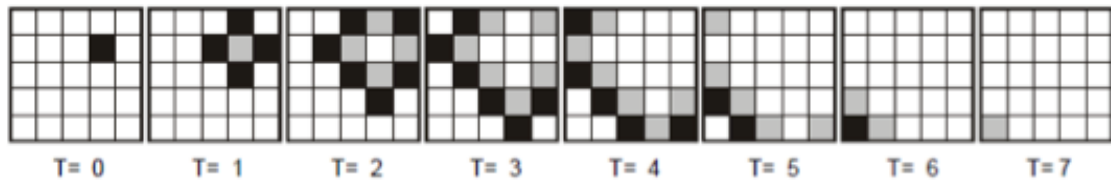


Figura 5: Evolução do autômato de Greenber-Hasting durante o tempo (Fonte: Revista de Ciências Exatas e Tecnologia Vol.III, N°3, Ano 2008).

2.2 Definição formal

Um autômato celular 1D (dimensão 1) consiste num espaço de configurações S , num conjunto de estados locais \mathcal{E} , numa aplicação local de evolução f e na especificação de condições fronteira dependentes de S . (Martinho, 2003)

O espaço de configurações S para um autômato celular é um conjunto que em geral tem a estrutura de reticulado, por exemplo \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_L com $L \in \mathbb{N}$. A cada ponto $i \in S$, do espaço de configurações, e cada instante de tempo $i \in \mathbb{N}$, associa-se um estado local

denotado $x_i(t)$. O conjunto de estados locais \mathcal{E} será, no nosso caso em estudo, um conjunto finito, tipicamente, $\{0, 1\}$ ou $\{0, 1 \dots m\}$.

Num determinado instante t , um estado consiste no conjunto dos estados locais indexados por S , $x(t) = x(t)_{i \in S}$. O conjunto dos estados será denotado por \mathcal{E}^S . A evolução temporal dos estados é obtida através de uma aplicação $F : \mathcal{E}^S \rightarrow \mathcal{E}^S$ que determina $x(t+1)$ em função de $x(t)$: $x(t+1) = F(x(t))$.

Esta aplicação estará determinada localmente por uma aplicação f definida num conjunto finito de estados locais e invariante por translação. Esta aplicação local f diz-se do tipo (n, m) com $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n \leq m$ $x_i(t+1) = f(x_{i+n}(t), x_{i+n+1}(t), \dots, x_{i+m}(t))$. Assim, o estado local na posição i no instante $t+1$ é determinado pelos estados locais nas posições anteriores $i+n, i+n+1, \dots, i+m$, no instante anterior t , através da função f .

Uma aplicação local diz-se uma regra local ou regra do autómato, neste contexto.

Como a aplicação global F fica determinada pela aplicação local f por termos

$x(t+1) = F(x(t))$, então o estado local de cada posição i é determinado por $x_i(t+1) = F(x(t))_i$ e, consequentemente,

$$F(x(t))_i = f(x_{i+n}(t), x_{i+n+1}(t), \dots, x_{i+m}(t)).$$

Definimos o sistema dinâmico discreto associado ao autómato celular definido pela regra local f como o par (\mathcal{E}^S, F) .

Para caracterizar o comportamento dinâmico do autómato celular, é necessário especificar as condições fronteira. Estas dependem do tipo do espaço de configurações S .

No caso $S = \mathbb{Z}$, não há condições fronteira a especificar porque não há fronteira e só por si se constrói o sistema dinâmico. No caso $S = \mathbb{N}$, pode ser necessário especificar as condições fronteira à esquerda. A fronteira é especificada no ponto $i = 1$. No caso $S = \mathbb{Z}_L$, pode ser necessário especificar as condições de fronteira à esquerda e à direita, isto é, nos pontos fronteiros $i = 0$ e $i = L - 1$.

O par (n, m) determina a necessidade de especificar as condições de fronteira ou não. No último caso se as condições de fronteira forem periódicas temos que $x(L-1, t) = x(0, t)$. (Luís Bandeira e Carlos Ramos, 2016)

Uma descrição de propriedades do autômato celular independentemente da especificação das condições de fronteira é possível ao definirmos a sua evolução por blocos. Um bloco de comprimento k é uma sequência $b_1 b_2 \dots b_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathcal{E}$. B_k denota o conjunto de todos os blocos de comprimento k . O número de elementos de B_k é igual a q^k , onde q é o número de estados locais, ou seja, o cardinal de \mathcal{E} . A função de evolução para os blocos induzida pela aplicação local f é $f_k: B_k \rightarrow B_{k+n-m}$

No caso $\mathcal{E} = \{0,1\}$ e $(n, m) = (-1, -1)$, tem-se um autômato celular binário (isto é, com 2 estados) em que apenas uma célula está envolvida em cada regra de transição: a célula vizinha da esquerda da célula em questão. Neste caso temos um total de $2^2 = 4$ regras. Uma possibilidade neste âmbito é a regra local que faz a associação: $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$, cuja aplicação $F: \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ se chama shift e simplesmente o que faz é apagar o primeiro elemento da sucessão infinita de zeros e uns $a_1 a_2 \dots a_k \dots$, isto é, $F(a_1 a_2 \dots a_k \dots) = a_2 \dots a_k \dots$, com $a_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, k, \dots$

No caso $\mathcal{E} = \{0,1\}$ e $(n, m) = (-1, 1)$, tem-se um autômato celular binário (isto é, com 2 estados) em que 3 células estão envolvidas em cada regra de transição: a própria célula em questão, a vizinha da direita e a vizinha da esquerda.

Neste caso temos um total de $2^8 = 256$ regras. Esses 256 autômatos celulares unidimensionais também são chamados de autômatos celulares elementares.

Usa-se o padrão lexicográfico usual (de Wolfram) de enumeração dos autômatos celulares elementares, no qual os bits de saída são arranjados da vizinhança 111 até a 000. (Wolfram, 1983)

Por exemplo, o autômato celular elementar

$$110 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^7$$

(em binário 01110110) é representado pela seguinte tabela de transição:

Tabela 2: Tabela de transição do AC elementar 110

Vizinhança	000	001	010	011	100	101	110	111
Saída	0	1	1	1	0	1	1	0

Graficamente representa-se 0 e 1 por branco e preto, respetivamente, como abaixo



Figura 6: Representação gráfica de cada coluna da Tabela 2.



Figura 7: Configuração inicial T_0

Fixando as fronteiras em 0s temos:

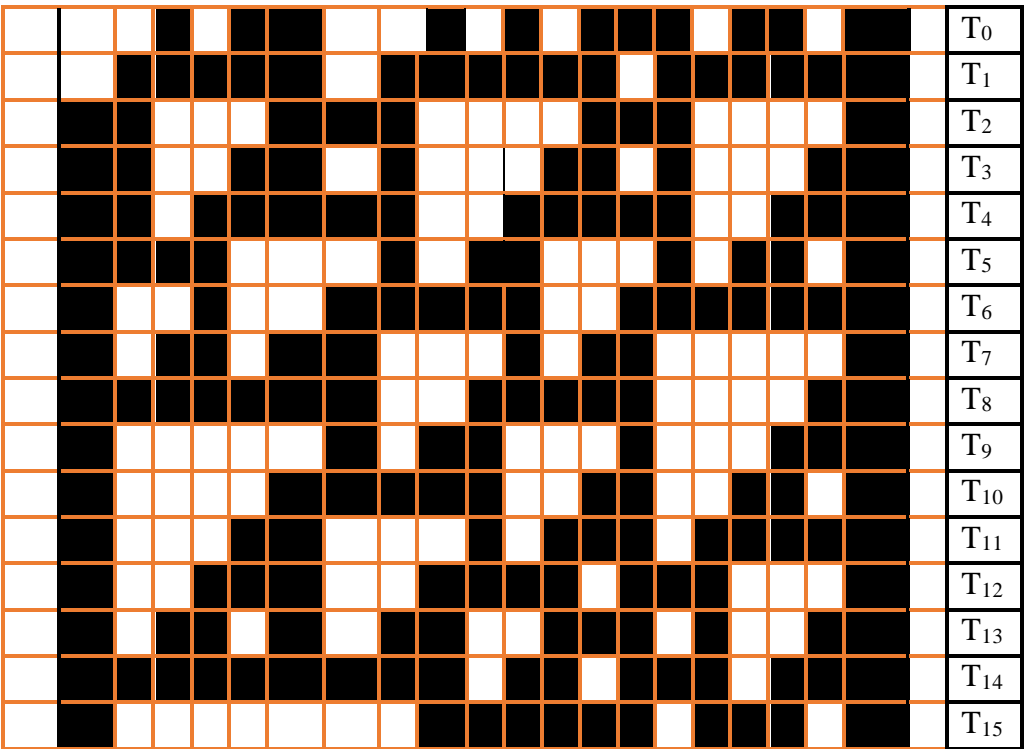


Figura 8: Autómatos celulares com as mesmas condições iniciais num período mais longo.

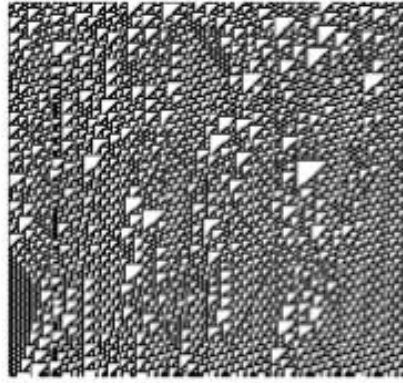


Figura 9: Autômatos Celulares (Fonte: Material da aula).

2.2.1 Regras de equivalências

Das 256 regras dos AC's elementares, existem 88 classes de equivalências. Uma regra é equivalente a outras quando:

- Quando fazemos transformação esquerda-direita.

Tabela 3: Transforma AC elementar 110 em sua regra de equivalência 124

Vizinhança Saída	111 0	110 1	101 1	100 0	011 1	010 1	001 1	000 0	Regra 110
Transformação Esquerda-direita	111 0	011 1	101 1	001 0	110 1	010 1	100 1	000 0	
Reordenando	111 0	110 1	101 1	100 1	011 1	010 1	001 0	000 0	Regra 124

- Quando fazemos a transformação de $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$.

Tabela 4: Transformação do AC elementar em sua regra de equivalência 137

Vizinhança Saída	111 0	110 1	101 1	100 0	011 1	010 1	001 1	000 0	Regra 110
Transformação 0s por 1s	000 1	001 0	010 0	011 1	100 0	101 0	110 0	111 1	
Reordenando	111 1	110 0	101 0	100 0	011 1	010 0	001 0	000 1	Regra 137

- Quando fazemos a composição das duas transformações – transformação conjunta

Tabela 5: Transformação do AC elementar 124 em sua regra de equivalente 193

Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
Saída	0	1	1	1	1	1	0	0	124
Transformação	000	001	010	011	100	101	110	111	
0s por 1s	1	0	0	0	0	0	1	1	
Reordenando	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
	1	1	0	0	0	0	0	1	193

Aplicando essas mesmas regras a uma mesma condição inicial, por exemplo, um reticulado de 148 “zeros” (brancos) e 1 “um” (preto) com 149 interações, podemos concluir graficamente que as regras elementares 110, 124, 137 e 139 são equivalentes.

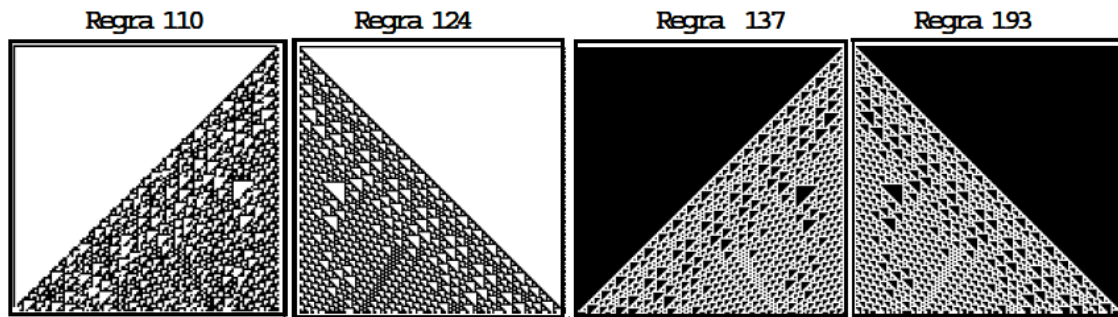


Figura 10: Espaço temporal das regras 110, 124, 137 e 193, para uma condição inicial de 148 brancos e 1 preto, com 149 iterações.

Pois embora, nem todas as regras possuam outras regras equivalentes, por exemplo a regra 232.

Tabela 6: Transformação esquerda-direita e 0s por 1s

Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
Saída	1	1	1	0	1	0	0	0	232
Transformação	111	011	101	001	110	010	100	000	
Esquerda-direita	1	1	1	0	1	0	0	0	
Reordenando	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
	1	1	1	0	1	0	0	0	232
Vizinhança	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
Saída	1	1	1	0	1	0	0	0	232
Transformação	000	001	010	011	100	101	110	111	
0s por 1s	0	0	0	1	0	1	1	1	
Reordenando	111	110	101	100	011	010	001	000	Regra
	1	1	1	0	1	0	0	0	232

3 A regra 184 e aplicações do intervalo $[0,1]$ nele próprio

Fixemo-nos na regra 184 que é uma regra do tipo $(-1, 1)$, com $n = -1$ e $m = 1$, definida pela aplicação local f :

$$\begin{aligned} f(000) &= 0, f(001) = 0, f(010) = 0, f(011) = 1 \\ f(100) &= 1, f(101) = 1, f(110) = 0, f(111) = 1. \end{aligned}$$

Consideremos a aplicação $F: \varepsilon^\Omega \rightarrow \varepsilon^\Omega$ associada à regra 184. Iremos construir e caracterizar uma aplicação $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, induzida por F de forma a obter uma semi-conjugação entre (ε^Ω, F) e $([0, 1], g)$.

Um resultado parcial é o seguinte:

Proposição 3.1: Nenhuma aplicação do tipo $g(x) = x + a$, com $a \neq 0$ constante, codifica a regra 184.

Demonstração:

Consideremos um $y = 0,1^\infty \in [0, 1]$ pela regra 184 o estado $x = 11 \dots 1^\infty$ é transformado em $F(x) = *1^\infty$ onde $*$ = 0 ou 1 dependendo da condição fronteira considerada. Definindo $\varphi: \varepsilon^\Omega \rightarrow [0,1]$ por $\varphi(a_1 a_2 \dots a_k \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}$, sabemos que se $\varphi(x) = y$ então $\varphi(F(x)) = 0,1^\infty$ ou $\varphi(F(x)) = 0,01^\infty$. Seja $a \neq 0$ da forma $a = 0.a_1 a_2 \dots a_k$.

Temos dois casos:

Primeiro caso: se $a_1 = 1$ e $a_i = 0$ para $i > 1$ então $g(y) = y + a = 1,01^\infty \notin [0, 1]$.

Segundo caso: $\exists_{i>1}: a_i \neq 0$ então $g(y) = y + a$ vai ter uma sequência de 0's na sua expansão binária devido ao “e vai 1” na soma, até à posição i ; logo não será igual nem a $0,1^\infty$ nem a $0,01^\infty$. ■

Observação 3.1: Facilmente se prova o mesmo resultado para $g(y) = by + a$.

Definição 3.1: Consideremos uma função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então $h(\cdot)$ diz-se contínua no ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se dada qualquer sucessão $(x_n) \rightarrow x_0$ com $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tem-se $(h(x_n)) \rightarrow h(x_0)$.

Ou seja $(|x_n - x_0|) \rightarrow 0 \Rightarrow (|h(x_n) - h(x_0)|) \rightarrow 0$.

Se $x < a$ e $x \rightarrow a$, convencionalmente, escreve-se $x \rightarrow a^-$; por analogia, se $x > a$ e $x \rightarrow a$, escreve-se $x \rightarrow a^+$. Designámos os números

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

que chamamos, respetivamente, limites à esquerda da função f no ponto a , e limite à direita da função f no ponto a (se estes números existirem).

Seja g a aplicação induzida por F .

Proposição 3.2: A aplicação g não é contínua em $[0, 1]$.

Demonstração:

Considere-se o ponto $\frac{1}{2}$ cujos limites à esquerda e à direita são $\frac{1}{2}^- = 0,01^\infty$ e $\frac{1}{2}^+ = 0,10^\infty$. Note-se que $\frac{1}{2}^- = \varphi(01^\infty)$ e $\frac{1}{2}^+ = \varphi(10^\infty)$. Estes estados pela regra 184 evoluem para $F(01^\infty) = *1^\infty$ e $F(10^\infty) = *10^\infty$ onde $*$ = 0 ou 1 dependendo da condição fronteira considerada. Mas $\varphi(*1^\infty) \neq \varphi(10^\infty)$ pela demonstração da proposição 3.1. Desta forma

$$g\left(\frac{1}{2}^-\right) = \varphi(F(01^\infty)) \neq \varphi(F(10^\infty)) = g\left(\frac{1}{2}^+\right)$$

logo g não é contínua em $[0, 1]$. ■

Uma generalização deste resultado é o seguinte:

Teorema 3.1: A aplicação g não é contínua em infinitos pontos de $[0, 1]$.

Demonstração:

Consideremos

$$h^+ = 0.h_1h_2 \dots h_k10^\infty \in [0, 1], \quad h^- = 0.h_1h_2 \dots h_k01^\infty \in [0, 1]$$

onde $h = h_1 h_2 \dots h_k \in [0, 1]$ e $h^+ \equiv h^-$, sendo h^+ o limite superior de h e h^- o limite inferior de h . Fazendo

$$g(h^+) \equiv 0.f_k(h_1 h_2 \dots h_k)010^\infty,$$

no caso de $h_k = 1 \Rightarrow g(h^-) = 0.f_k(h_1 h_2 \dots h_k)1^\infty$;

se de $h_k = 0 \Rightarrow g(h^-) = 0.f_k(h_1 h_2 \dots h_k)001^\infty$, onde f_k é uma aplicação de evolução por blocos. Em qualquer um dos casos $g(h^+) \neq g(h^-)$.

Provando assim que a aplicação g não é contínua em infinitos pontos de $[0, 1]$. Em particular, em todos os pontos da forma $0.h_1 h_2 \dots h_k 10^\infty \equiv 0.h_1 h_2 \dots h_k 01^\infty$. ■

A aplicação g será obtida por um processo recursivo, baseado na construção de uma família por aproximação nas partições P_k , que definimos em seguida.

Seja a família da partições P_k definida por:

$$P_1 = \{I_0, I_1\} \text{ com } I_0 = \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ e } I_1 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$$

$$P_2 = \{I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}\} \text{ com } I_{00} = \left]0, \frac{1}{4}\right[, I_{01} = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, I_{10} = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[\text{ e } I_{11} = \left]\frac{3}{4}, 1\right[$$

Em geral para $k \geq 1$, $P_k = \{I_{\alpha_1 \dots \alpha_k} : \alpha_j \in \{0, 1\}\}$ com $I_{\alpha_1 \dots \alpha_k} =]0.\alpha_1 \dots \alpha_k 0^\infty, 0.\alpha_1 \dots \alpha_k 1^\infty[$, e o número de intervalos de cada partição P_k é dado por $|P_k| = 2^k$.

A indexação dos intervalos de cada partição P_k é conveniente pelo seguinte: o intervalo $I_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ com indexação $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \{0, 1\}^k$ corresponde ao conjunto de pontos de $[0, 1]$ cuja expansão binária é do tipo $0.\alpha_1 \dots \alpha_k \dots$. Podemos usar a seguinte notação

$$P_k = \{I^{(i)} : i = 1, \dots, 2^k\}.$$

A relação entre as duas notações é $I^{(i)} = I_{\text{expansão em binário de comprimento } k \text{ de } (i-1)}$.

A aplicação g actua nas partições P_k levando os intervalos em intervalos e como tal ação de g em cada partição P_k pode ser codificada por meio de matrizes de transição $A(k)$.

Para a regra 184 existem dois casos a distinguir, o caso da fronteira fixa à esquerda por 0 e o caso da fronteira fixa à esquerda por 1. Daí vão existir duas funções:

g_0 correspondente à fronteira fixa à esquerda por 0 e g_1 correspondente à fronteira fixa à esquerda por 1. (Martinho, 2003)

1º Caso: condição de fronteira 0 fixa à esquerda

Consideremos a partição P_1 . Então $A(1)$ é definida como

$$A(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_0(I^{(i)}) \supset I^{(j)} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Verificamos facilmente que

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De facto, centrado em 0 podemos ter a condição fronteira fixa à direita a 0 ou 1,

$$g_0(I_0) = I_{f(000)} \cup I_{f(001)} \text{ e obtemos}$$

$$000 \rightarrow 0, 001 \rightarrow 0$$

Logo, $g_0(I_0) \subseteq I_0$, ou seja, o estado local 0 transita apenas para 0 e portanto, $a_{11} = 1$ e $a_{12} = 0$. Centrando em 1 podemos ter a condição fronteira fixa à direita a 0 ou a 1,

$$g_0(I_1) = I_{f(010)} \cup I_{f(011)} \text{ e obtemos:}$$

$$010 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1$$

Logo, $g_0(I_1) \subseteq I_0 \cup I_1$, ou seja o estado local 1 transita para 0 e para 1 e portanto $a_{21} = 1$ e $a_{22} = 1$, então a matriz é

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere-se a partição P_k . A aplicação g_0 que actua em P_k levando o intervalos em intervalos da seguinte forma:

$$g_0(I_{\alpha_1 \dots \alpha_k}) = I_{f_{k+2}(0\alpha_1 \dots \alpha_k 0)} \cup I_{f_{k+2}(0\alpha_1 \dots \alpha_k 1)},$$

onde $f_{k+2}: B_{k+2} \rightarrow B_k$.

Vamos construir a matriz de transição $A(k)$ que codifica g_0 na partição P_k .

Define-se $A(k) = [a_{ij}]$ onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_0(I^i) \supset I^j, \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, 2^k.$$

Agora, queremos mostrar o processo recursivo que nos dá $A(k+1)$ em função de $A(k)$ para $k > 1$. Demonstraremos por construção que $A(k)$ tem a seguinte estrutura

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix},$$

onde os blocos $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$ codificam diferentes transições possíveis.

Estes blocos são dados recursivamente por

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}, \quad A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

Para a partição P_1 temos a matriz de transição, como já vimos

$$A(1) = \begin{bmatrix} A_0(1) & 0 \\ A_1(1) & A_2(1) \end{bmatrix}.$$

Com $A_0(1) = A_1(1) = A_2(1) = 1$, obtemos

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os blocos de $A(k+1)$, $A_0(k+1)$, $A_1(k+1)$ e $A_2(k+1)$, são definidos em relação à partição $P_{k+1} = \{I_{00\alpha}, I_{01\alpha}, I_{10\alpha}, I_{11\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\}$, e serão escritos em função dos blocos de $A(k)$, $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$, em relação à partição $P_k = \{I_{0\alpha}, I_{1\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\}$:

O que cada bloco codifica é o seguinte, com $\alpha, \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^{k-1}$,

em P_k

$A_0(k)$ codifica a transição de $I_{0\alpha}$ para $I_{0\tilde{\alpha}}$,

$A_1(k)$ codifica a transição de $I_{1\alpha}$ para $I_{0\tilde{\alpha}}$,

$A_2(k)$ codifica a transição de $I_{1\alpha}$ para $I_{1\tilde{\alpha}}$.

em P_{k+1}

$A_0(k+1)$ codifica a transição de $I_{00\alpha}$ e $I_{01\alpha}$ para $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$,

$A_1(k+1)$ codifica a transição de $I_{10\alpha}$ e $I_{11\alpha}$ para $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$,

$A_2(k+1)$ codifica a transição de $I_{10\alpha}$ e $I_{11\alpha}$ para $I_{10\tilde{\alpha}}$ e $I_{11\tilde{\alpha}}$.

As restantes transições não ocorrem. Vamos então justificar a estrutura em blocos de $A(k)$.

A ação de g_0 num intervalo de $I_{0\alpha}$ de P_k é:

$$g_0(I_{0\alpha}) = I_{f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}.$$

Como $f(00\alpha_1) = 0$, então

$$g_0(I_{0\alpha}) = I_{0f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{0f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{0\alpha}$ induzidas por g_0 existem para o intervalo $I_{0\tilde{\alpha}}$. O bloco $A_0(k)$ codifica as transições de $I_{0\alpha}$ para $g_0(I_{0\alpha}) = I_{0\tilde{\alpha}}$.

A ação de g_0 num intervalo $I_{1\alpha}$, $\alpha \in \{0, 1\}^{k-1}$ de P_k é :

$$g_0(I_{1\alpha}) = I_{f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Como

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 1,$$

as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{1\alpha}$ induzidas por g_0 existem, tanto para intervalo $I_{0\tilde{\alpha}}$ como para o intervalo $I_{1\tilde{\alpha}}$ (dependendo de α_1). Consideremos $A_1(k)$ o bloco que codifica as transições $I_{1\alpha} \rightarrow I_{1\tilde{\alpha}}$ e $A_2(k)$ o bloco que codifica as transições $I_{1\alpha} \rightarrow I_{0\tilde{\alpha}}$.

Vamos, então, construir a matriz $A(k+1)$ de transição na partição

$$P_{k+1} = \{I_{00\alpha}, I_{01\alpha}, I_{10\alpha}, I_{11\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\},$$

em função dos blocos de $A(k)$: $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$.

A ação de g_0 num intervalo $I_{00\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_0(I_{00\alpha}) = I_{f(000)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(000)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Como $f(000) = f(00\alpha_1) = 0$, então

$$g_0(I_{00\alpha}) = I_{00f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{00f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)}.$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{00\alpha}$ induzidas por g_0 só poderão existir para o intervalo $I_{00\tilde{\alpha}}$. Por definição de $A(k)$, temos codificando as transições de $I_{00\alpha}$ para $g_0(I_{00\alpha}) = I_{00\tilde{\alpha}}$ o bloco $A_0(k)$, então

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ * & * \end{bmatrix}.$$

A ação de g_0 num intervalo $I_{01\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_0(I_{01\alpha}) = I_{f(001)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{f(001)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)}$$

Como $f(001) = 0$, então

$$g_0(I_{01\alpha}) = I_{0f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{0f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{01\alpha}$ induzidas por g_0 não irão ocorrer para os intervalos $I_{10\tilde{\alpha}}$ e $I_{11\tilde{\alpha}}$. Por outro lado,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 1.$$

Assim, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{01\alpha}$ induzidas por g_0 existem para o intervalo $I_{00\tilde{\alpha}}$ como para o intervalo $I_{01\tilde{\alpha}}$, ou seja,

$$g_0(I_{01\alpha}) = I_{00\tilde{\alpha}} \cup I_{01\tilde{\alpha}}.$$

Por definição de $A(k)$, o bloco que codifica as transições de $I_{01\alpha}$ para $I_{00\tilde{\alpha}}$, é o bloco $A_1(k)$ e o bloco que codifica as transições de $I_{01\alpha}$ para $I_{01\tilde{\alpha}}$ é o bloco $A_2(k)$, então

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

A ação de g_0 num intervalo $I_{10\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_0(I_{10\alpha}) = I_{f(010)f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{f(010)f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)}$$

Como $f(010) = 0$ e $f(10\alpha_1) = 1$, então

$$g_0(I_{10\alpha}) = I_{01f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{01f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{10\alpha}$ induzidas por g_0 só poderão transitar para o intervalo $I_{01\tilde{\alpha}}$. Por definição de $A(k)$, o bloco que codifica as transições de $I_{10\alpha}$ para $g_0(I_{10\alpha}) = I_{01\tilde{\alpha}}$, é o bloco $A_0(k)$, então

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ * & * \end{bmatrix} \text{ e } A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

A ação de g_0 num intervalo $I_{11\alpha}$, $\alpha \in \{0, 1\}^{k-1}$ de P_{k+1} é:

$$g_0(I_{11\alpha}) = I_{f(011)f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(011)f(11\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Como $f(011) = 1$, então

$$g_0(I_{11\alpha}) = I_{1f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{1f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{11\alpha}$ induzidas por g_0 não irão ocorrer para os intervalos $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$. Por outro lado,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 1.$$

Assim, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{11\alpha}$ induzidas por g_0 existem tanto para o intervalo $I_{10\tilde{\alpha}}$ como para o intervalo $I_{11\tilde{\alpha}}$. Por definição de $A(k)$ temos as codificações das transições de $I_{11\alpha}$ para $g_0(I_{11\alpha}) = I_{10\tilde{\alpha}}$ pelo bloco $A_1(k)$ e codificando as transições de $I_{11\alpha}$ para $g_0(I_{11\alpha}) = I_{11\tilde{\alpha}}$ temos o bloco $A_2(k)$, deste modo

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

Verificando, assim, que podemos construir a matriz de transição $A(k+1)$ a partir dos blocos que estruturam a matrizes de transição $A(k)$, para qualquer $k > 1$.

Utilizando o Mathematica© fizemos uma simulação da aplicação g_0 e obtivemos o seguinte gráfico:

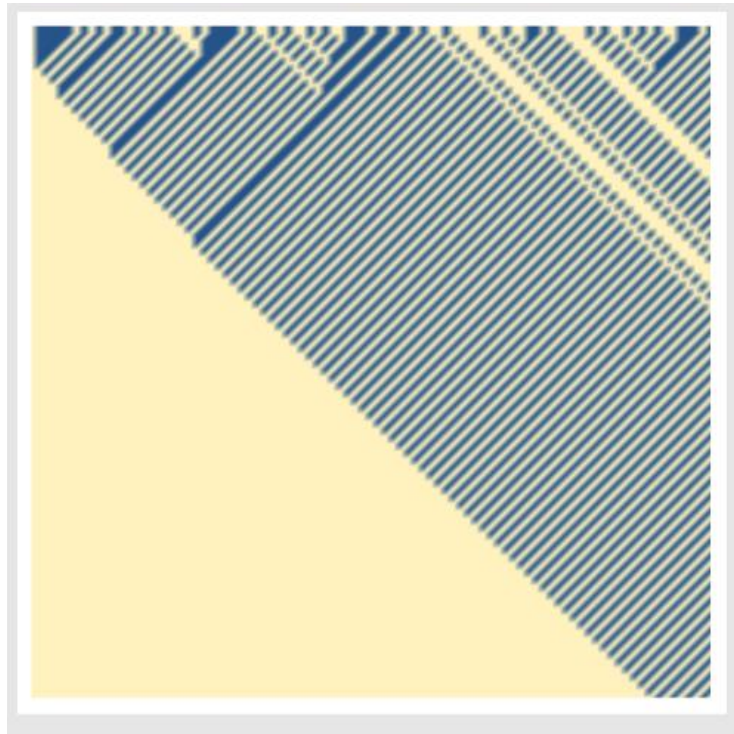


Figura 11: Regra 184-0 esquerda

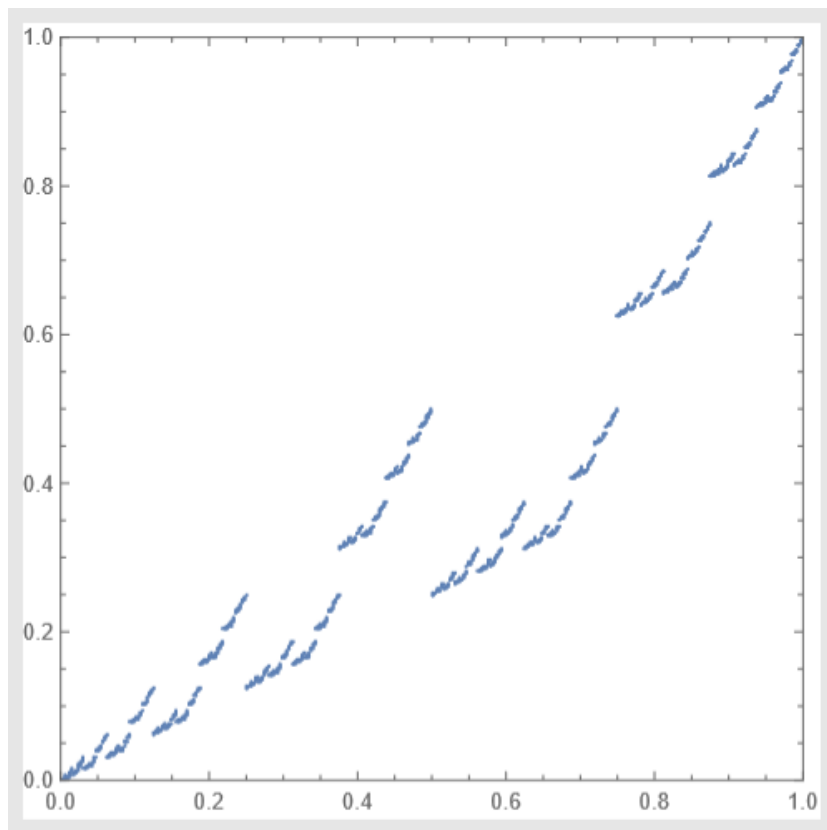


Figura 12: Regra 184-0 esquerda com condição inicial aleatória

O gráfico foi construído da seguinte forma: Primeiramente foi gerado uma distribuição uniforme de pontos do intervalo $[0, 1]$. Cada ponto x desta distribuição foi convertido em binário e a sua expansão foi truncada a partir de um certo valor k que serve como parâmetro. A sequência que se obteve foi transformada noutra através de uma aplicação F que implementa o autómato celular – regra 184. Finalmente, a sequência obtida foi novamente convertida em decimal obtendo-se $g(x)$. Quanto maior o valor k e quanto maior o número de pontos da distribuição melhor é a aproximação obtida.

2º Caso: condição de fronteira 1 fixa à esquerda.

O procedimento para construir a aplicação do intervalo associada à condição fronteira à esquerda igual a 1, designada g_1 , é análogo ao procedimento que utilizámos na construção da condição da aplicação para a condição fronteira fixa à esquerda a 0, g_0 .

Não havendo perigo de confusão, usaremos a mesma letra $A(k)$ para designar a matriz que codifica g_1 na partição P_k .

Consideremos a partição P_1 . Então $A(1)$ define-se como

$$A(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_1(I^{(i)}) \supset I^{(j)} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Facilmente, verifica-se que

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De seguida mostremos o processo recursivo que nos dá $A(k+1)$ em função de $A(k)$, para $k > 1$. Demonstramos ainda, por construção, que $A(k)$ tem estrutura de blocos

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix},$$

onde os blocos $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$ são dados recursivamente por

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}, \quad A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

Para a partição P_1 temos a matriz de transição, como já vimos

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(1) \\ A_1(1) & A_2(1) \end{bmatrix},$$

Com $A_0(1) = A_1(1) = A_2(1) = 1$, obtemos

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como anteriormente, os blocos de $A(k+1)$, $A_0(k+1)$, $A_1(k+1)$ e $A_2(k+1)$, são definidos em relação à partição $P_{k+1} = \{I_{00\alpha}, I_{01\alpha}, I_{10\alpha}, I_{11\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\}$, e serão escritos em função dos blocos de $A(k)$, $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$, em relação à partição $P_k = \{I_{0\alpha}, I_{1\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\}$:

O que cada bloco codifica é o seguinte, com $\alpha, \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^{k-1}$,

em P_k

$A_0(k)$ codifica a transição de $I_{0\alpha}$ para $I_{1\tilde{\alpha}}$,

$A_1(k)$ codifica a transição de $I_{1\alpha}$ para $I_{0\tilde{\alpha}}$,

$A_2(k)$ codifica a transição de $I_{1\alpha}$ para $I_{1\tilde{\alpha}}$.

em P_{k+1}

$A_0(k+1)$ codifica a transição de $I_{00\alpha}$ e $I_{01\alpha}$ para $I_{10\tilde{\alpha}}$ e $I_{11\tilde{\alpha}}$,

$A_1(k+1)$ codifica a transição de $I_{10\alpha}$ e $I_{11\alpha}$ para $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$,

$A_2(k+1)$ codifica a transição de $I_{10\alpha}$ e $I_{11\alpha}$ para $I_{10\tilde{\alpha}}$ e $I_{11\tilde{\alpha}}$.

As restantes transições não ocorrem. Vamos então justificar a estrutura em blocos de $A(k)$.

Seja $\alpha \in \{0, 1\}^{k-1}$. A ação de g_1 num intervalo de $I_{0\alpha}$ de P_k é:

$$g_1(I_{0\alpha}) = I_{f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

mas como $f(10\alpha_1) = 1$, então

$$g_1(I_{0\alpha}) = I_{1f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{1f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{0\alpha}$ induzidas por g_1 existem para o intervalo $I_{1\tilde{\alpha}}$. O bloco $A_0(k)$ codifica as transições de $I_{0\alpha}$ para $g_1(I_{0\alpha}) = I_{1\tilde{\alpha}}$.

A ação de g_1 num intervalo $I_{1\alpha}$ de P_k é :

$$g_1(I_{1\alpha}) = I_{f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Como

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 1.$$

Assim, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{1\alpha}$ induzidas por g_1 , existem tanto no intervalo $I_{0\tilde{\alpha}}$ como no intervalo $I_{1\tilde{\alpha}}$. Consideremos $A_1(k)$ o bloco que codifica as transições $I_{1\alpha} \rightarrow I_{0\tilde{\alpha}}$ e $A_2(k)$ o bloco que codifica as transições $I_{1\alpha} \rightarrow I_{1\tilde{\alpha}}$. Vamos, então, construir a matriz $A(k+1)$ de transição na partição

$$P_{k+1} = \{I_{00\alpha}, I_{01\alpha}, I_{10\alpha}, I_{11\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\},$$

em função dos blocos de $A(k)$, $A_0(k)$, $A_1(k)$ e $A_2(k)$.

A ação de g_1 num intervalo $I_{00\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_1(I_{00\alpha}) = I_{f(100)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(100)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

mas como $f(100) = 1$ e $f(00\alpha_1) = 0$, então

$$g_1(I_{00\alpha}) = I_{10f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{10f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{00\alpha}$ induzidas por g_1 só poderão existir para o intervalo $I_{10\tilde{\alpha}}$. Por definição de $A(k)$ temos codificando as transições de $I_{00\alpha}$ para $g_1(I_{00\alpha}) = I_{10\tilde{\alpha}}$ o bloco $A_0(k)$, então

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ \star & \star \end{bmatrix}.$$

A ação de g_1 num intervalo $I_{01\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_1(I_{01\alpha}) = I_{f(101)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(101)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

mas como $f(101) = 1$, então

$$g_1(I_{01\alpha}) = I_{1f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{1f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{01\alpha}$ induzidas por g_1 não irão ocorrer para os intervalos $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$. Por outro lado,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(01\alpha_1) = 1.$$

Assim, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{01\alpha}$ induzidas por g_1 existem tanto no intervalo $I_{10\tilde{\alpha}}$ como no intervalo $I_{11\tilde{\alpha}}$.

Por definição, o bloco de $A(k)$ que codifica as transições de $I_{10\alpha}$ para $g_1(I_{10\alpha}) = I_{10\tilde{\alpha}}$ é o bloco $A_1(k)$ e o que codifica as transições de $I_{01\alpha}$ para $g_1(I_{01\alpha}) = I_{11\tilde{\alpha}}$ é o bloco $A_2(k)$, então

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

A ação de g_1 num intervalo $I_{10\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_1(I_{10\alpha}) = I_{f(110)f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(110)f(10\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

mas como $f(110) = 0$ e $f(10\alpha_1) = 1$, então

$$g_1(I_{10\alpha}) = I_{01f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{01f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{10\alpha}$ induzidas por g_1 só poderão transitar para o intervalo $I_{01\alpha}$. Por definição $A(k)$ temos codificando as transições de $I_{10\alpha}$ para $g_1(I_{10\alpha}) = I_{01\tilde{\alpha}}$ o bloco $A_0(k)$, então

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ * & * \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

A ação de g_1 num intervalo $I_{11\alpha}$ de P_{k+1} é:

$$g_1(I_{11\alpha}) = I_{f(111)f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{f(111)f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

mas como $f(111) = 1$, então

$$g_1(I_{11\alpha}) = I_{1f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 0)} \cup I_{1f(11\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k 1)}$$

Logo, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{11\alpha}$ induzidas por g_1 não irão ocorrer nos intervalos $I_{00\tilde{\alpha}}$ e $I_{01\tilde{\alpha}}$. Por outro lado,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 0,$$

$$\alpha_1 = 1 \Rightarrow f(11\alpha_1) = 1.$$

Assim, as correspondentes transições dos pontos do intervalo $I_{11\alpha}$ induzidas por g_1 existem tanto no intervalo $I_{10\tilde{\alpha}}$ como no intervalo $I_{11\tilde{\alpha}}$. Por definição de $A(k)$, temos as codificações das transições de $I_{11\alpha}$ para $g_1(I_{11\alpha}) = I_{10\tilde{\alpha}}$ o bloco $A_1(k)$ e codificando as transições de $I_{11\alpha}$ para $g_1(I_{11\alpha}) = I_{11\tilde{\alpha}}$ o bloco $A_2(k)$, então

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}.$$

Verificando assim que podemos construir a matriz de transição $A(k+1)$ a partir dos blocos que estruturam a matrizes de transição $A(k)$ para qualquer $k > 1$.

Utilizando o Mathematica© fizemos uma simulação da aplicação g_1 e obtivemos o gráfico da Figura 13:

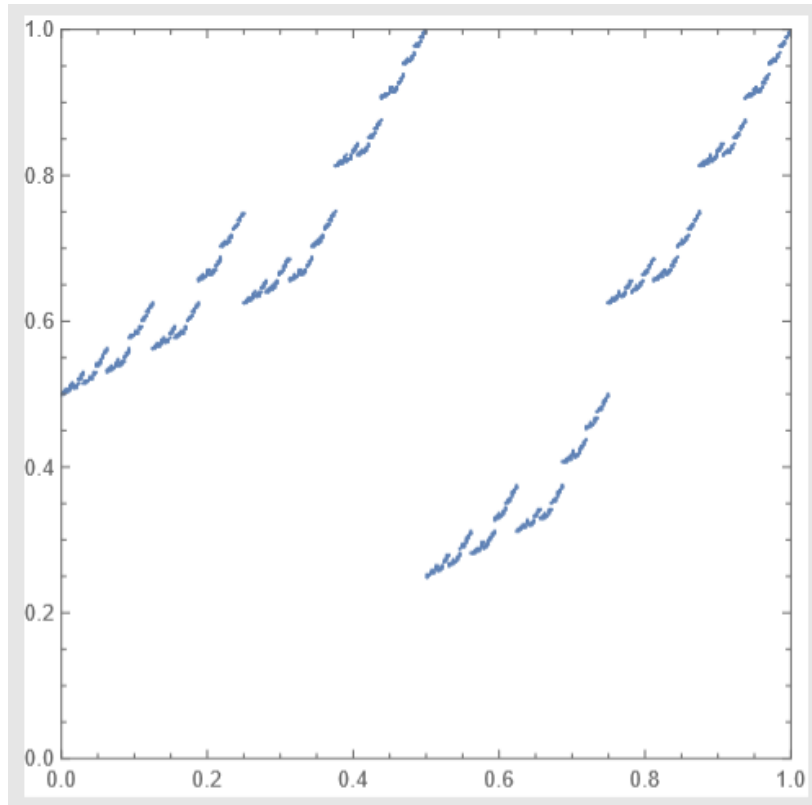


Figura 13: Regra 184-1 esquerda.

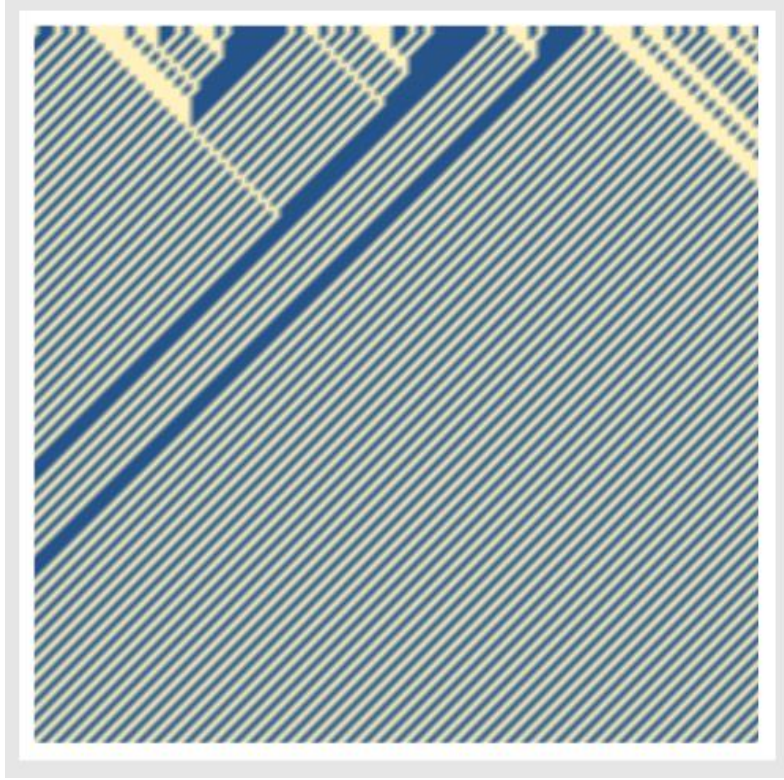


Figura 14: Regra 184-1 com condição inicial aleatória.

O resultado demonstrado acima, pode ser resumido no seguinte teorema.

Teorema 3.2: Seja g uma aplicação $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ induzida pela regra 184. A ação da função g na partição P_k é representada através de uma matriz de transição $A(k)$ que satisfaz a seguinte recursão:

$$A(k) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}$$

com

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix},$$

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}$$

Para condições de fronteiras à esquerda a 0, e

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}$$

com

$$A_0(k+1) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix},$$

$$A_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A_0(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$A_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1(k) & A_2(k) \end{bmatrix}$$

para condições de fronteira à esquerda a 1.

4 Autômato celular de 3 estados e aplicação do intervalo

Vamos considerar um exemplo de um autômato de 3 estados do tipo $(-1, 1)$. Assim, consideramos $\varepsilon = \{0,1,2\}$. A aplicação local f com $n = -1$ e $m = 1$ é definida como:

$$f(000) = 1, f(001) = 1, f(002) = 1, f(010) = 2, f(011) = 2, f(012) = 2, f(020) = 0, f(021) = 0, f(022) = 0,$$

$$f(100) = 1, f(101) = 1, f(102) = 1, f(110) = 2, f(111) = 2, f(112) = 2, f(120) = 0, f(121) = 0, f(122) = 0,$$

$$f(200) = 1, f(201) = 1, f(202) = 1, f(210) = 2, f(211) = 2, f(212) = 2, f(220) = 0, f(221) = 0, f(222) = 0.$$

Se escrevermos a imagem de cada bloco de três símbolos obtemos a sequência

111222000111222000111222000.

A representação de Wolfram corresponde ao número em base decimal associado à sequência acima vista como um número em base 3:

$$\begin{aligned} 277019723695 &= f(222) \times 3^{26} + f(221) \times 3^{25} + \dots + f(001) \times 3^1 + f(000) \times 3^0 \\ &= \\ &1 \times (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11} + 3^{18} + 3^{19} + 3^{20}) + \\ &+ 2 \times (3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^{12} + 3^{13} + 3^{14} + 3^{21} + 3^{22} + 3^{23}) + \\ &+ 0 \times (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^{15} + 3^{16} + 3^{17} + 3^{24} + 3^{25} + 3^{26}). \end{aligned}$$

Consideremos a aplicação $F: \varepsilon^\Omega \rightarrow \varepsilon^\Omega$ associada à regra 277019723695.

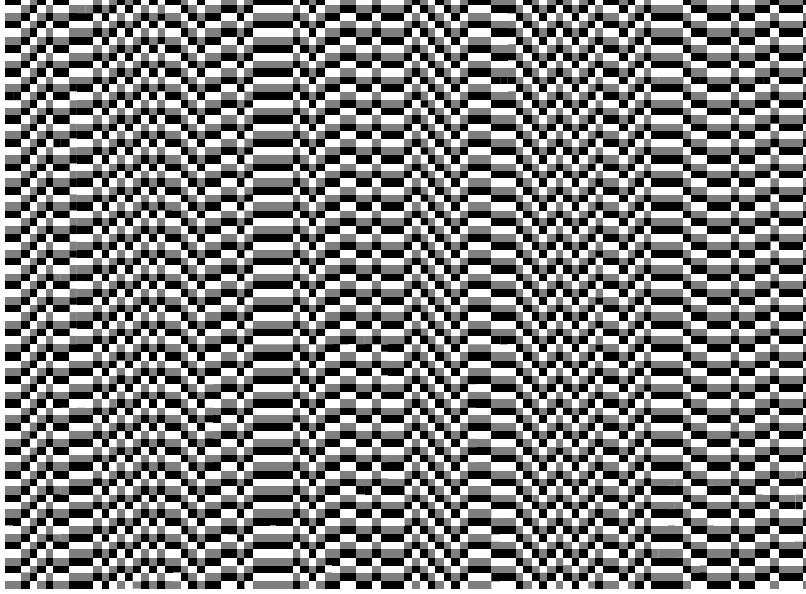


Figura 15: Regra 184 com três estados.

Como no capítulo anterior, determinamos uma aplicação $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, induzida por F de forma a obter uma semi-conjugação entre (ε^Ω, F) e $([0, 1], g)$.

A aplicação g vai ser obtida por um processo recursivo, baseado na construção de uma família por aproximação nas partições P_k , que definimos em seguida.

Seja a família da partições P_k definida da seguinte forma:

$$P_1 = \{I_0, I_1, I_2\} \text{ com } I_0 = \left]0, \frac{1}{3}\right[\text{ e } I_1 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \text{ } I_2 = \left]\frac{2}{3}, 1\right[$$

$$P_2 = \{I_{00}, I_{01}, I_{02}, I_{10}, I_{11}, I_{12}, I_{20}, I_{21}, I_{22}\} \text{ com } I_{00} = \left]0, \frac{1}{9}\right[, \text{ } I_{01} = \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[, \text{ } I_{02} = \left]\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right[, \text{ } I_{10} = \left]\frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right[, \text{ } I_{11} = \left]\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right[, \text{ } I_{12} = \left]\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right[, \text{ } I_{20} = \left]\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right[, \text{ } I_{21} = \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[, \text{ } I_{22} = \left]\frac{8}{9}, 1\right[.$$

Em geral para $k \geq 1$, $P_k = \{I_{\alpha_1 \dots \alpha_k} : \alpha_j \in \{0, 1, 2\}\}$ com

$$I_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \left]0.\alpha_1 \dots \alpha_k 0^\infty, 0.\alpha_1 \dots \alpha_k 2^\infty\right[,$$

onde os números de intervalos da cada partição P_k é dado por $|P_k| = 3^k$.

A indexação dos intervalos de cada partição P_k é conveniente pelo seguinte: o intervalo $I_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ com indexação $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \{0, 1, 2\}^k$ corresponde ao conjunto de pontos de $[0, 1]$ cuja expansão ternária é do tipo $0.\alpha_1 \dots \alpha_k \dots$. Iremos também usar a seguinte notação

$$P_k = \{I^{(i)} : i = 1, \dots, 3^k\}.$$

A relação entre as duas notações é $I^{(i)} = I_{\text{expansão em ternário de comprimento } k \text{ de } (i-1)}$.

A aplicação g actua nas partições P_k levando os intervalos em intervalos e como tal acção de g em cada partição P_k pode ser codificada por meio de matrizes de transição $A(k)$.

Ao contrário da regra 184, para a regra referida existe apenas um caso a distinguir, pois devido a uma simetria na regra local o estado à esquerda é irrelevante. A simetria é a seguinte

$$f(0ij) = f(1ij) = f(2ij).$$

Assim, não é necessário especificar fronteira fixa à esquerda e denotamos $f(*ij)$ a imagem de qualquer uma das três configurações $0ij$, $1ij$, ou $2ij$. Vamos por isso considerar apenas uma função g .

Consideremos a partição P_1 . Então, $A(1)$ é definida como

$$A(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ onde } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } g(I^{(i)}) \supset I^{(j)} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Verificamos facilmente que

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De facto, $g(I_0) = I_{f(*00)} \cup I_{f(*01)} \cup I_{f(*02)}$ e obtemos

$$*00 \rightarrow 1, \quad *01 \rightarrow 1, \quad *02 \rightarrow 1$$

Logo, $g(I_0) \subseteq I_1$, ou seja, o estado local 0 transita apenas para 1 e portanto, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$. Em seguida,

$g(I_1) = I_{f(*10)} \cup I_{f(*11)} \cup I_{f(*12)}$ e obtemos:

$$*10 \rightarrow 2, \quad *11 \rightarrow 2, \quad *12 \rightarrow 2$$

Logo, $g(I_1) \subseteq I_2$, ou seja o estado local 1 transita para 2, portanto $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$ e $a_{23} = 1$. Finalmente,

$g(I_2) = I_{f(*20)} \cup I_{f(*21)} \cup I_{f(*22)}$ e obtemos:

$$* 20 \rightarrow 0, \quad * 21 \rightarrow 0, \quad * 22 \rightarrow 0$$

Logo, $g(I_2) \subseteq I_0$, ou seja o estado local 2 transita para 0, portanto $a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$ e $a_{33} = 0$.

Então a matriz é

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, generalizando, consideremos a partição P_k . A aplicação g que actua em P_k leva intervalos em intervalos da seguinte forma:

$$g(I_{\alpha_1 \dots \alpha_k}) = I_{f_{k+2}(*\alpha_1 \dots \alpha_k 0)} \cup I_{f_{k+2}(*\alpha_1 \dots \alpha_k 1)} \cup I_{f_{k+2}(*\alpha_1 \dots \alpha_k 2)},$$

onde $f_{k+2}: B_{k+2} \rightarrow B_k$ é a aplicação por blocos de comprimento apropriado induzida pela regra local.

Vamos construir a matriz de transição $A(k)$ que codifica g na partição P_k .

Define-se $A(k) = [a_{ij}]$ para $i, j = 1, \dots, 2^k$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } g(I^{(i)}) \supset I^{(j)} \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Agora, queremos mostrar o processo recursivo que nos dá $A(k+1)$ em função de $A(k)$ para $k > 0$. Demonstraremos por construção que $A(k)$ tem a seguinte estrutura recursiva

$$A(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A(k) & 0 \\ 0 & 0 & A(k) \\ A(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, k > 0$$

com

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a decomposição da partição $P_k = \{I_{0\alpha}, I_{1\alpha}, I_{2\alpha} : \alpha \in \{0, 1, 2\}^{k-1}\}$ e consideremos $A(k)$ dividida em três blocos de acordo com essa decomposição

$$A(k) = \begin{bmatrix} B_{0,0}(k) & B_{0,1}(k) & B_{0,2}(k) \\ B_{1,0}(k) & B_{1,1}(k) & B_{1,2}(k) \\ B_{2,0}(k) & B_{2,1}(k) & B_{2,2}(k) \end{bmatrix}.$$

Cada bloco $B_{i,j}(k)$ corresponde às possíveis transições de $I_{i\alpha}$ para $I_{j\beta}$, com $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \in \{0, 1\}^{k-1}$. Para a partição P_1 temos a matriz de transição, como já vimos

$$A(1) = \begin{bmatrix} B_{0,0}(1) & B_{0,1}(1) & B_{0,2}(1) \\ B_{1,0}(1) & B_{1,1}(1) & B_{1,2}(1) \\ B_{2,0}(1) & B_{2,1}(1) & B_{2,2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com $B_{0,1}(1) = B_{1,2}(1) = B_{2,0}(1) = 1$ e os restantes blocos iguais a 0.

Em geral, $B_{0,1}(k)$, $B_{1,2}(k)$ e $B_{2,0}(k)$ são os únicos blocos de $A(k)$ não nulos, devido às únicas possíveis transições

$$* 0 \rightarrow 1, * 1 \rightarrow 2, * 2 \rightarrow 0.$$

(*simetria*)

Deste modo

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & B_{0,1}(k) & 0 \\ 0 & 0 & B_{1,2}(k) \\ B_{2,0}(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Falta apenas identificar a estrutura de cada $B_{0,1}(k)$, $B_{1,2}(k)$ e $B_{2,0}(k)$. Vamos considerar a partição para $k+1$:

$$P_{k+1} = \{I_{00\alpha}, I_{01\alpha}, I_{02\alpha}, I_{10\alpha}, I_{11\alpha}, I_{12\alpha}, I_{20\alpha}, I_{21\alpha}, I_{22\alpha} : \alpha \in \{0, 1\}^{k-1}\},$$

Neste caso

$B_{i,j}(k+1)$ codifica a transição de $I_{i0\alpha} \cup I_{i1\alpha} \cup I_{i2\alpha}$ para $I_{j0\alpha} \cup I_{j1\alpha} \cup I_{j2\alpha}$. Como o primeiro e ultimo símbolo são irrelevantes, devido à simetria da regra, o bloco $B_{i,j}(k+1)$ codifica as transições do segundo símbolo de modo idêntico à matriz $A(k)$.

Para analisar com maior detalhe vejamos a ação de g nos intervalos de P_{k+1} :

$$\begin{aligned}
g(I_{00\alpha}) &= I_{f(*00)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{f(*00)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)} \\
&\quad \cup I_{f(*00)f(00\alpha_1)f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k2)} = I_{11f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cdot \\
g(I_{01\alpha}) &= I_{f(*01)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k0)} \cup I_{f(*01)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k1)} \\
&\quad \cup I_{f(*01)f(01\alpha_1)f(1\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k2)} = I_{12f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot
\end{aligned}$$

Abreviando os restantes casos temos

$$\begin{aligned}
g(I_{02\alpha}) &= I_{10f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{10\alpha}) &= I_{21f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{11\alpha}) &= I_{22f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{12\alpha}) &= I_{20f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{20\alpha}) &= I_{01f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{21\alpha}) &= I_{02f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot \\
g(I_{22\alpha}) &= I_{00f(0\alpha_1\alpha_2)\dots f(\alpha_{k-1}\alpha_k*)} \cdot
\end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
&A(k+1) = \\
&\left[\begin{array}{ccccccc}
& & & & B_{0,1}(k) & & \\
& & & & & B_{1,2}(k) & \\
& & & B_{2,0}(k) & & & \\
& & & & & & B_{0,1}(k) \\
& & & & & & & B_{1,2}(k) \\
& & & & & B_{2,0}(k) & & \\
& B_{0,1}(k) & & & & & & \\
& & B_{1,2}(k) & & & & & \\
B_{2,0}(k) & & & & & & &
\end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$e B_{0,1}(k+1) = B_{1,2}(k+1) = B_{2,0}(k+1) = A(k)$$

Utilizando o Mathematica© fizemos uma simulação da aplicação g e obtivemos o seguinte gráfico .

O gráfico foi obtido de forma análoga ao da regra 184. Foi gerada uma distribuição uniforme de pontos do intervalo $[0, 1]$ e cada ponto x desta distribuição foi convertido em base 3. A sua expansão foi truncada a partir de um certo valor k que serve como parâmetro de aproximação. A sequência que se obteve foi transformada noutra através de uma aplicação F que implementa a regra do autômato. Finalmente, a sequência obtida foi novamente convertida em decimal obtendo-se $g(x)$. Quanto maior o valor k e quanto maior o número de pontos da distribuição melhor é a aproximação obtida.

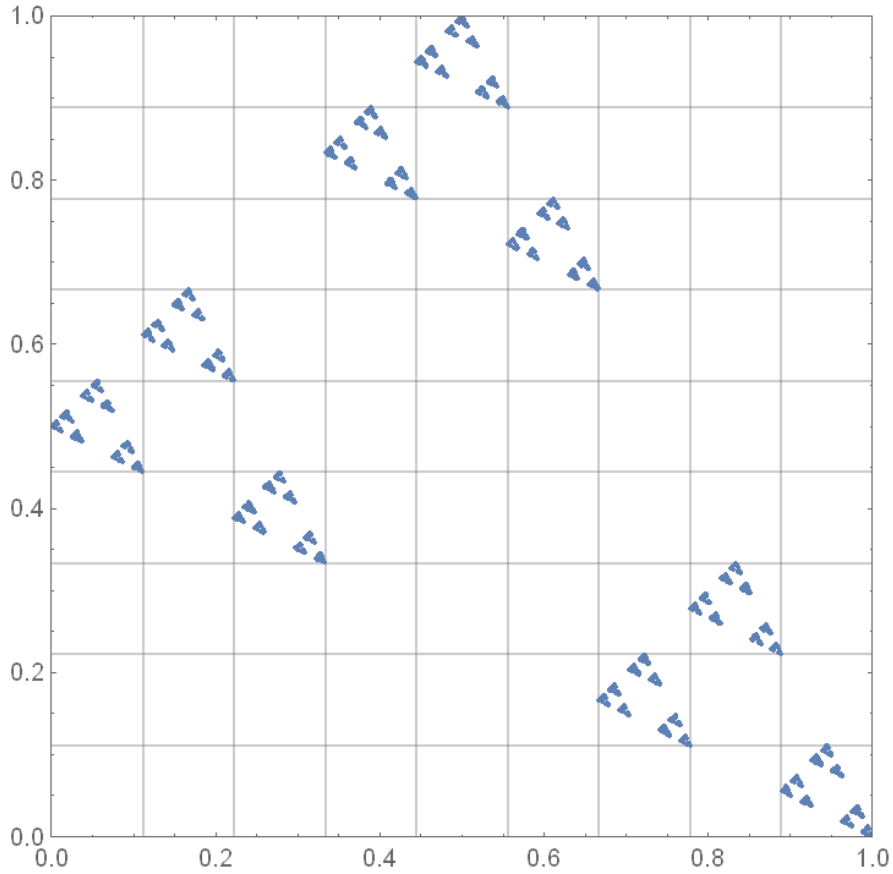


Figura 16: Regra 277019723695.

O resultado demonstrado acima, pode ser resumido no seguinte teorema.

Teorema 4.1: Seja g uma aplicação $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ induzida pela regra 277019723695. A acção da função g na partição P_k é representada através de uma matriz de transição $A(k)$ que satisfaz a seguinte recursão:

$$A(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & A(k) & 0 \\ 0 & 0 & A(k) \\ A(k) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k > 0 \quad \text{com}$$

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5 Conclusão

Os autómatos celulares são sistemas dinâmicos discretos com aplicações em diversas áreas do conhecimento. Todas as aplicações que hoje existem desde campo da biologia evolutiva, economia do mercado, na bioquímica, nas engenharias e também na matemática são devido ao desenvolvimento da computação e dos métodos simbólicos.

No nosso trabalho, definimos e caracterizamos aplicações do intervalo associadas a autómatos celulares, através da regra local e recorrendo a expansões numéricas em bases apropriadas. A base depende do número de estados locais do autômato. Torna-se importante a determinação das condições fronteira à esquerda devido à associação de uma configuração do autômato - estado global - com a expansão numérica na base referida. Para cada condição fronteira à esquerda temos uma variante da aplicação do intervalo. Assim para cada autômato temos uma aplicação do intervalo para cada especificação de condição fronteira.

Por outro lado, os gráficos das aplicações deste tipo têm uma estrutura auto-semelhante, que depende diretamente da estrutura da regra local e das transições locais. São então funções totalmente descontínuas com gráfico fractal e auto-semelhante.

Foram feitos os cálculos explícitos para uma regra a dois estados - 184 - e uma regra a três estados.

Este tema tem sido divulgado com grande frequência pelos meios de comunicação, porém, essa divulgação nem sempre consegue proporcionar a construção do conhecimento de maneira formal. Por isso se faz necessário a intervenção dos professores na transmissão para alunos do ensino básico e secundário.

6 Bibliografia

- [1] L. Bandeira; C. Correia Ramos (2016). Transition matrices characterizing a certain totally discontinuous map of the interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 444, Issue 2, 1274-1303
- [2] M. L. A. Castro; R. O. Castro (2008). Autômatos celulares: implementações de von Neumann, Conway e Wolfram. *Revista de Ciências Exatas e Tecnologia* Vol. III, Nº. 3
- [3] C. Correia Ramos (2017). Materiais disponibilizados pelo professor durante as aulas, [Grafos_cadeias_Markov_topologicas.pdf](#), [Grafos_cadeias_Markov.pdf](#), [Autómatos celulares.pdf](#)
- [4] M. Gardner (1970). Mathematical Games: The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game 'Life', *Scientific American* 223 (4)
- [5] J. M. Greenberg; S. P. Hastings (1978). "Spatial Patterns for Discrete Models of Diffusion in Excitable Media". *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 54 (3): 515–523
- [6] S. J. Leon (2018). *Álgebra linear com aplicações*, LTC
- [7] M. J. Martinho (2003). *Modelos matemáticos para o tráfego urbano*, Trabalho de fim de curso, Universidade de Évora,
- [8] S. Wolfram (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*. 55 (3): 601.